1. Kombinatorika

Vilenkin: Kombinatorika

A *-gal jelölteket próbálják szorzási szabállyal és a kombinatorika 6 alapesetének felhasználásával is megoldani.

1,4,8,9,10,14,16, 17*, 19*, 22*, 23*, 24*, 26

2. Klasszikus valószínűség

Mihálykóné: Valószínűségszámítás példatár informatikusoknak (továbbiakban VPI)

1. a, b, d, k 2. d 3. c, h 4. a, c, d, g

3. Generátorfüggvény

Nem lesz ZH-n.

4. Binomiális és polinomiális együtthatók

Az órán vetthez hasonló feladatok várhatóak.

Mi az ab^3c^2 együtthatója az $(a+b+c)^6$ kifejezésben?

Melyik a legnagyobb együttható a $(x+y+z+u)^{10}$ kifejezésben, és melyik tagé vagy tagoké?

Írja le a $(a+b)^7$ polinomot teljesen kifejtve (azaz zárójelek nélkül)!

(Az utóbbi feladatnál a binomiális együtthatókat is kiszámíthatja egyesével, de a Pascal-háromszög használatával is meghatározhatja az egyes együtthatókat.)

5. Szitaformula

Számoljuk ki hányan nem tudnak egy idegen nyelvet sem a 30 fős osztályban? A következőket tudjuk. Ha A az angolul tudók halmazát jelenti, N a németül tudókat, O az olaszul tudókat, akkor

$$|A| = 13, \qquad |N| = 11, \qquad |O| = 3$$
$$|A \cap N| = 3, \qquad |A \cap O| = 1, \qquad |O \cap N| = 1 \qquad |A \cap O \cap N| = 1$$

(23-an tudják valamelyik nyelvet, 7 nem.)

Az előző felmérésnél elfelejtették a franciául beszélőket figyelembe venni (F halmaz). De most ezzel aztán minden idegennyelvtudást felmértek. Más idegen nyelvet senki nem beszél.

$$|F| = 9, \qquad |A \cap F| = 3, \qquad |F \cap O| = 1, \qquad |F \cap N| = 4$$
$$|A \cap F \cap N| = 3, \qquad |F \cap O \cap A| = 1, \qquad |F \cap N \cap A| = 2 \qquad |A \cap O \cap N \cap F| = 1$$

Hányan nem beszélnek idegen nyelvet az osztályban?

(13+11+3+9 - 3-1-1-3-1-4 +1+3+1+2 -1=29-en beszélnek, tehát egyetlen diák nem beszél nyelvet.)

6. Geometriai valószínűség

Mihálykóné: VPI

Teljes 16-os oldal

7. Összetett események valószínűsége, események függetlensége

Mi az előadás jelöléseihez hasonlóan az események együttes előfordulását szorzásjellel jelöljük a feladatgyűjtemény $\cap$ jelével szemben, a $\cup$ helyett pedig az összeadás jelét használjuk.

Mihálykóné: VPI

Teljes 25-ös oldal

8. Diszkrét eloszlású valószínűségi változók és jellemzőik

Az órai jelölésrenszerrel szemben a valószínűségi változóra nem a X és Y latin nagybetűket, hanem a feladatgyűjteményhez hasonlóan a ξ és η (kszí és éta) görög kisbetűket fogjuk használni. Feladatmegoldás esetén mindkettőt elfogadom, amennyiben a feladatban nincs megadva a jelölés.

Mihálykóné: VPI

Teljes 43-as oldal. Móduszok és mediánok nem kellenek.

9. Nevezetes diszkrét eloszlású valószínűségi változók és jellemzőik

Ezeknél általánosan kiszámítható az eloszlás paramétereiből a várható érték és a szórás, szerencsére nem kell minden egyes valószínűséget kiszámítani és összegezni ehhez. A képleteket érdemes megjegyezni.

Érdemes minden esetben megnézni, hogy az adott kérdésben szereplő valószínűség számolható könnyebben direkt módon, vagy az ellentett eseményé: sokszor az utóbbiból könnyebb visszaszámolni az előbbit.

Az eloszlások megtanulásához hasznos a táblázat, amiből egy-egy példányt mindenki kap.

Mihálykóné: VPI Az 55-as oldalon kezdődő fejezetben a következő sorszámúak: 1. 2. 3. 7. 8.

10. Folytonos eloszlású valószínűségi változók és jellemzőik

Mihálykóné: VPI Az 55-ös oldalon kezdődő fejezetben a következő sorszámúak: 1.* 2. 3.

11. Nevezetes folytonos eloszlású valószínűségi változók és jellemzőik

Mihálykóné: VPI Az 78-as oldalon kezdődő fejezetben a következő sorszámúak: exponenciális 3. 4.* 5. normális eloszlás 6, 7, 8, 9, 10 a)-e),11

12. Feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel

Mihálykóné: VPI Az 33-as oldalon kezdődő fejezetben a következő sorszámúak:

Feltételes valószínűség és függetlenség: 1, 2, 3, 4, 5

Teljes valószínűség tétele, Bayes–tétel: 6, 7, 8

12.1. feladat. *Egy üzemben három gyártósoron készítik az autófelniket. Az egyes sorokon készült felnik darabszámát, illetve a selejtes termékek arányát az alábbi táblázat mutatja. (a) Töltse ki a hiányzó mezőket! (b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy felnit véletlenszerűen kiválasztva jót választunk ki? (c) Mekkora a valószínűsége, hogyha véletlenszerűen hibás felnit választottunk ki, akkor az a III. sorról való?*

gyártósor	*I.*	*II.*	*III.*
darabszám	*2000*	*3000*	*5000*
ekkora rész	____________ %	____________ %	____________ %
selejtarány	*3%*	*5%*	*2%*

12.2. feladat. *Magyar személyek által kapott leveleket vizsgáltak. A személyek a levelek 5%-át jelölték spamnek. A spamnek jelölt levelek 3%-ában szerepelt együtt az* olcsó *szó és a* kihagyhatatlan *szó, a többi levélnek csak fél százalékában.*

a) A levelek __________ százalékában szerepel együtt a két szó.

b) Ha egy szóban együtt szerepel ez a két szó, az __________ százalék valószínűséggel spam.
($0,00625 \approx 0,6\%, 24\%$)

Ha nem tudnánk semmi információt a levélről, akkor csak 5% eséllyel lenne spam. Bővebben erről, hogyan összesíthetőek az egyes szavak hatása a valószínűségre:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Naive_Bayes_spam_filtering`

12.3. feladat. *20 urnában golyók vannak. Az elsőben 9 piros és 1 kék, a többi urna mindegyikében két piros és két kék. Egyforma valószínűséggel választunk a 20 urna közül, majd abból kihúzunk véletlenszerűen egy golyót. (Mielőtt számolunk, gondoljuk végig milyen határok között várjuk az eredményeket!)*

a) A golyó __________ százalék valószínűséggel lesz piros.

b) Ha pirosat húztam, azt __________ százalék valószínűséggel az elsőből húztam.

12.4. feladat. *Egy bútorgyárban három gyártósor van. Az elsőn készülő alaktrészek 5%-a székláb, a másodikon és harmadikon készülő alkatrészeknek pedig 10–10%-a.*

a) A gyártott termékeknek __________ százaléka székláb.

b) Ha egy kiválasztott termék székláb, __________ a valószínűsége, hogy a 2. gyártósoron készült.

12.1. Összefüggések

12.1. definíció (feltételes valószínűség). *Az A esemény B-re vonatkoztatott valószínűségének nevezzük a*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1}$$

valószínűséget.

12.1. tétel. *A és B esemény pontosan akkor független, ha*

$$P(A|B) = P(A). \tag{2}$$

12.2. definíció (teljes valószínűség tétele). *Amennyiben $B_1, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszer és A egy esemény ugyanazon eseménytér felett, akkor*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i). \tag{3}$$

12.3. definíció (Bayes tétele). *Amennyiben $B_1, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszer és A egy esemény ugyanazon eseménytér felett, akkor*

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}. \tag{4}$$

13. Kapcsolatok az eloszlások között

Mihálykóné: VPI Az 85-as oldalon kezdődő fejezetben a következő sorszámúak:

1.

A feladat tanulsága, hogy elég nagy n és elég kicsi p érték esetén a binomiális eloszlás közelíthető egy ugyanolyan várható értékű Poisson-eloszlással. Tehát $\lambda = np$ paraméterűvel.

A 2. feladat már nem lesz a zh-ban.

Ott arra van szükség, hogy tudjuk, hogy két Poisson-eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson-eloszlású. Ha az eredeti eloszlásokban a paraméter (a várható érték) λ_1 és λ_2, akkor az összegük eloszlása esetén $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Tehát az összeg eloszlása:

$$P(\xi_1 + \xi_2 = k) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \tag{5}$$