Jelek spektruma, Fourier–transzformáció

Horváth Árpád <horvath.arpad@amk.uni-obuda.hu>

Óbudai Egyetem
Alba Regia Egyetemi Központ (AREK)
Székesfehérvár

2014. október 7.

Fellegi József anyagának felhasználásával.

Spektrum vagy színkép, a frekvenciatartománybeli alak:
milyen „szinuszos" jelekből tudom összerakni.
Ennek tanulmányozására ajánlott a
`http://www.falstad.com/fourier` oldal.

Pár feladat, amit megoldhatunk vele:

1. Hogyan lehet egy jel összetevőit meghatározni?
2. Hogyan torzul a négyszögjel, ha egy vezetéken (=aluláteresztő szűrőn) küldöm át?
3. Milyen kapcsolat van a jel spektruma és a modulált jel spektruma között?
4. Hangok és képek igen jelentős (veszteséges) tömörítése.

Vázlat

Harmónikus jel fogalma

Definició

Harmónikus jelnek nevezzük azokat a jeleket, amelyek felírhatóak

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

alakban.

Tulajdonképpen ezek a szinuszfüggvény középiskolában tanult transzformáltjai (eltoltjai, nyújtottjai az egyes tengelyek mentén).

Tétel

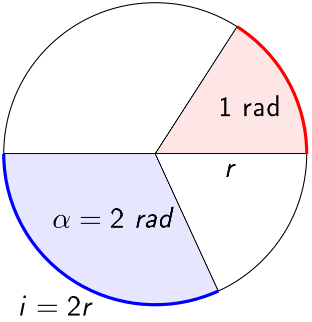
Minden harmónikus jel felírható

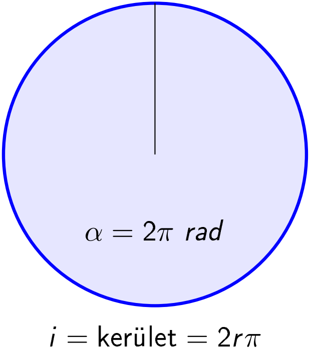
$$f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

alakban is megfelelő a, b valós számokkal.

Vázlat

A radián értelmezése, átváltása





$$\alpha_{rad} = \frac{i}{r} \qquad \frac{\alpha_{rad}}{\pi} = \frac{\alpha_{fok}}{180^\circ}$$

Példák az átváltásra

1. példa

Váltsuk át az alábbi radián-értékeket fokba!

$$\frac{\pi}{3}\,rad, \quad \frac{\pi}{4}\,rad, \quad \frac{3\pi}{4}\,rad, \quad \frac{3\pi}{2}\,rad, \quad 1\,rad, \quad 3{,}141\,rad, \quad 2{,}5\,rad$$

2. példa

Váltsuk át az alábbi fok-értékeket radiánba!

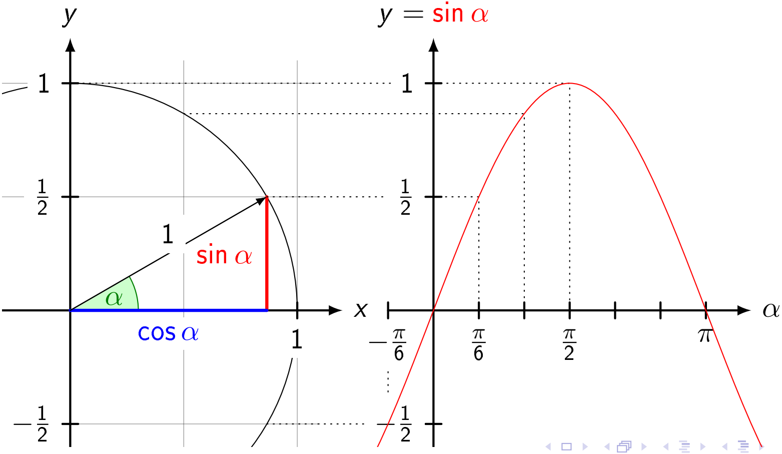
$$90^\circ, \quad 300^\circ, \quad 15^\circ, \quad -20^\circ, \quad 114{,}6^\circ$$

3. példa

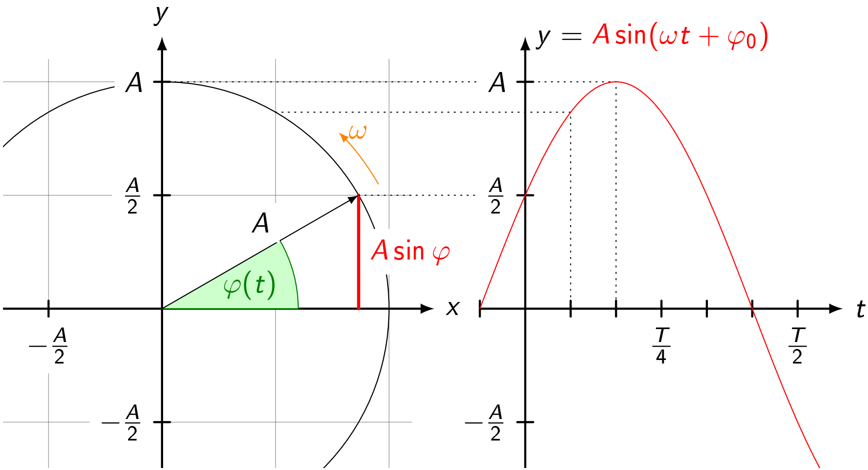
Egy $r = 20$ cm sugarú körben mekkora a 3 radiános központi szöghöz tartozó ívhossz?

Szögfüggvények, szinusz függvény

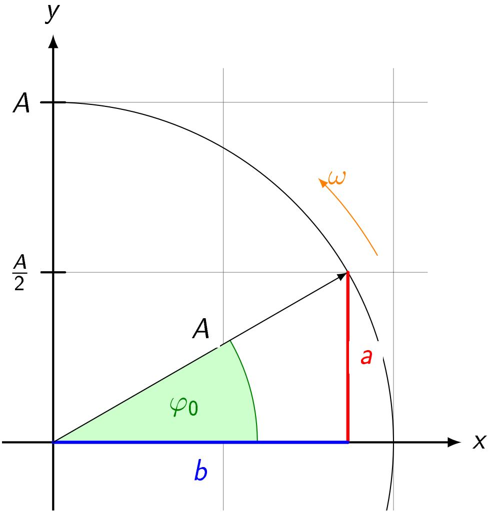
A sin és cos szögfüggvényeket adott irányszögű egységvektor koordinátáiként definiáljuk.



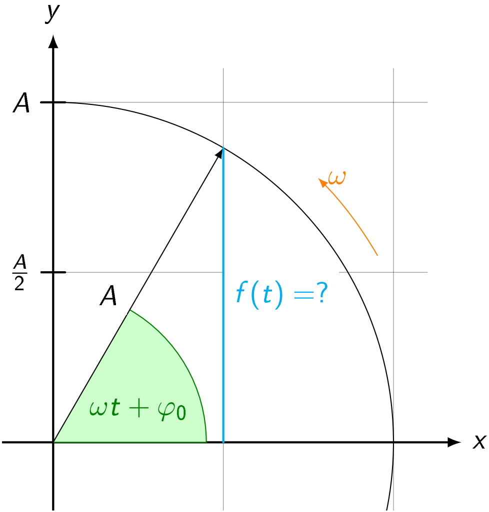
A forgóvektor



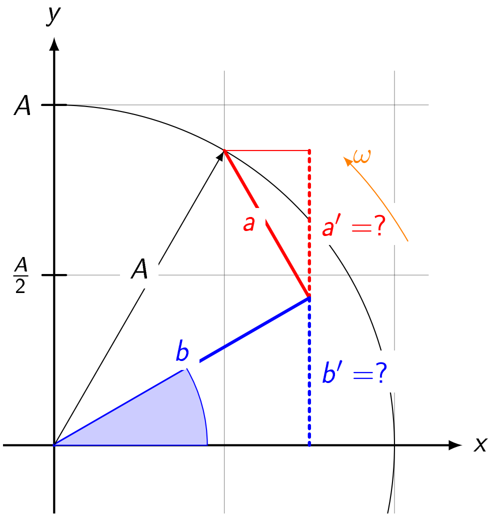
cos és sin összetevők $(t = 0)$



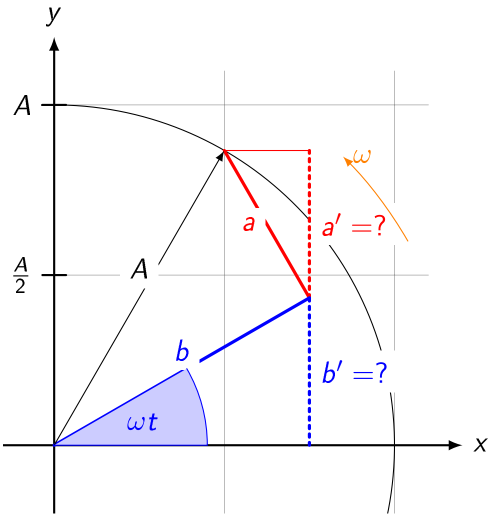
cos és sin összetevők ($t \neq 0$)



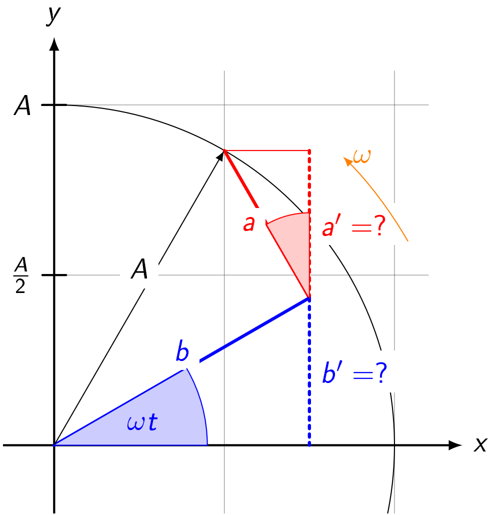
cos és sin összetevők $(t \neq 0)$



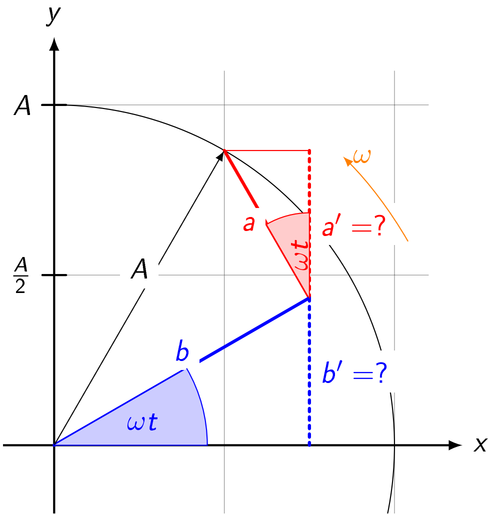
cos és sin összetevők ($t \neq 0$)



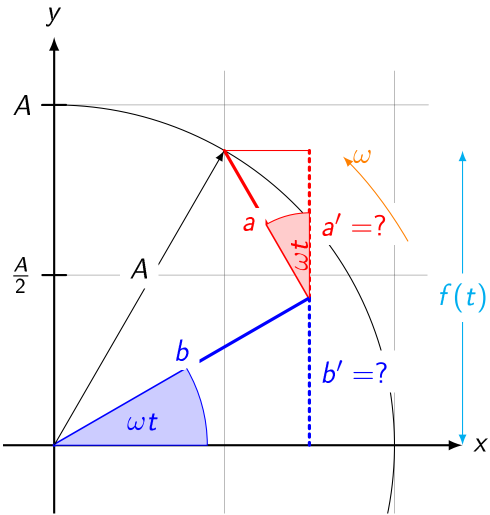
cos és sin összetevők ($t \neq 0$)



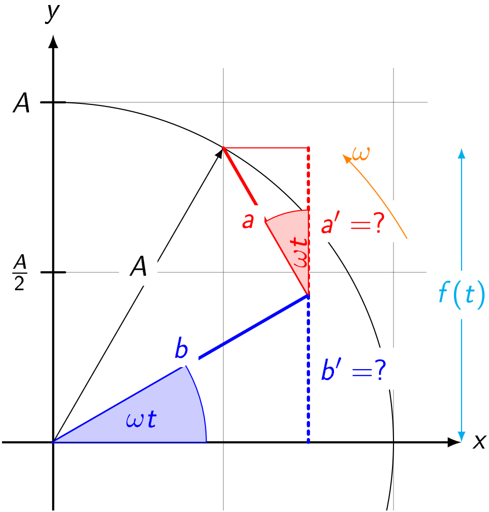
cos és sin összetevők ($t \neq 0$)



cos és sin összetevők ($t \neq 0$)

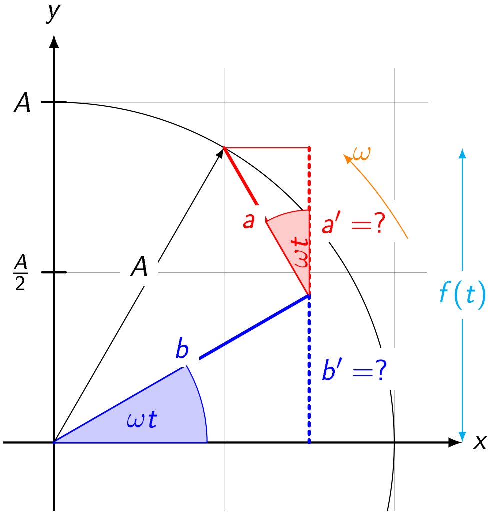


cos és sin összetevők ($t \neq 0$)



$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

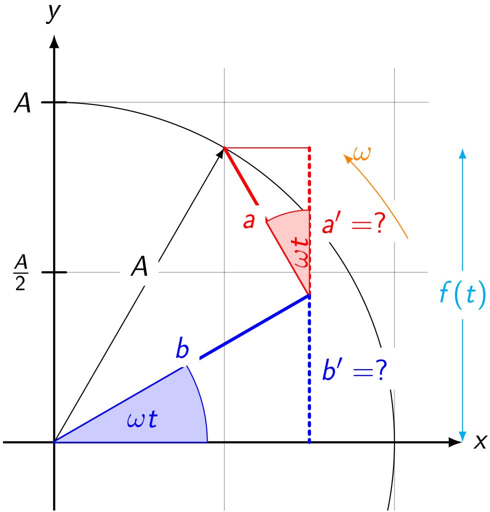
cos és sin összetevők ($t \neq 0$)



$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$f(t) = a' + b'$$

cos és sin összetevők ($t \neq 0$)



$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$f(t) = a' + b'$$

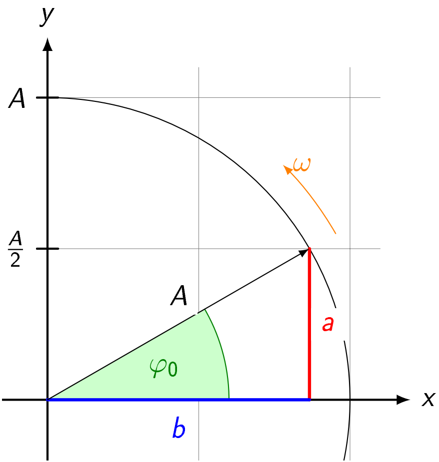
$$f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

A kétféle írásmód közül néha az egyik, néha a másik kellemesebb illetve hasznosabb.

Példa

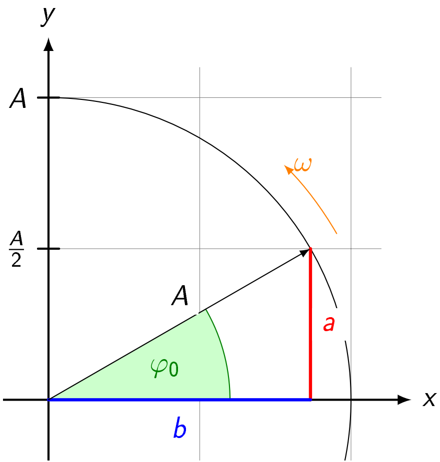
Hogyan tudunk áttérni az egyik féle írásmódból a másikba? Másképpen milyen kapcsolat van a (a, b) és a (A, φ) valós számpárok között?

Összefüggés (a, b) és (A, φ) között



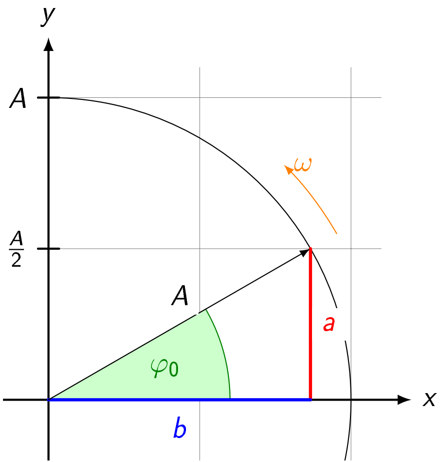
$A =$

Összefüggés (a, b) és (A, φ) között



$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\operatorname{tg} \varphi_0 =$$

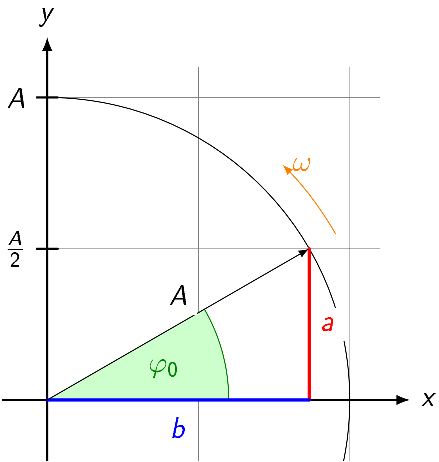
Összefüggés (a, b) és (A, φ) között



$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = a/b$$

$$a =$$

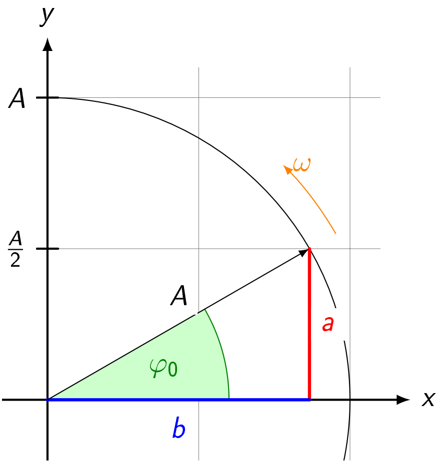
Összefüggés (a, b) és (A, φ) között



$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = a/b$$

$$a = A \sin \varphi_0$$
$$b =$$

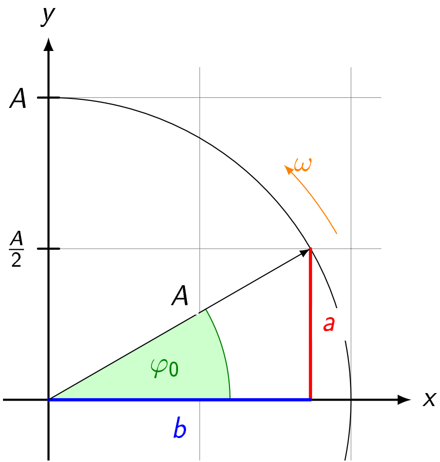
Összefüggés (a, b) és (A, φ) között



$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = a/b$$

$$a = A \sin \varphi_0$$
$$b = A \cos \varphi_0$$

Összefüggés (a, b) és (A, φ) között



$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = a/b$$

$$a = A \sin \varphi_0$$
$$b = A \cos \varphi_0$$

A kapott eredmények fontosak, de inkább az ábráról való leolvasásukat érdemes megjegyezni, mint a végeredményeket.

Példák az átváltásra

1. példa

Határozzuk meg az a és b értéket 4 értékes jegy pontossággal,

$$A = 6\ \mathrm{V}, \quad \varphi_0 = \pi/3$$

2. példa

$$f(t) = 4\ \mathrm{V} \cdot \sin \omega t + 3\ \mathrm{V} \cos \omega t = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

esetén határozzuk meg A és φ_0 értékét négy értékes jegyre.

3. példa

$$f(t) = -4\ \mathrm{V} \cdot \sin \omega t + 3\ \mathrm{V} \cos \omega t$$

esetén ugyanez.

Vázlat

Vázlat

1. Harmónikus jel és a szögfüggvények
   - Szükséges alapismeretek ismétlése
2. Fourier-sor
   - Trigonometrikus alakban
   - Fourier-sor exponenciális alakban
3. Fourier–transzformáció (folytonos és diszkrét)
   - Az AM modulált jel spektruma
   - Diszkrét Fourier–transzformáció (DFT)
4. A jelek csoportosítása

Fourier-sor

- Periodikus jelekre működik.
- $f(t+T) = f(t)$
- Trigonometrikus alak:

$$\begin{aligned} x(t) = a_0 + & a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots \\ & + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots = \\ = a_0 + & \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)) \end{aligned}$$

- $$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad (1)$$

Fourier-sor

- Periodikus jelekre működik.
- $f(t+T) = f(t)$
- Trigonometrikus alak:

$$x(t) = a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + \dots$$
$$+ b_1\sin(\omega_0 t) + b_2\sin(2\omega_0 t) + \dots =$$
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t))$$

- $$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

Fourier-sor

- Periodikus jelekre működik.
- $f(t+T)=f(t)$
- Trigonometrikus alak:

$$\begin{aligned} x(t) = a_0 + & a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + \dots \\ & + b_1\sin(\omega_0 t) + b_2\sin(2\omega_0 t) + \dots = \\ = a_0 + & \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t)) \end{aligned}$$

- $$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{1}$$

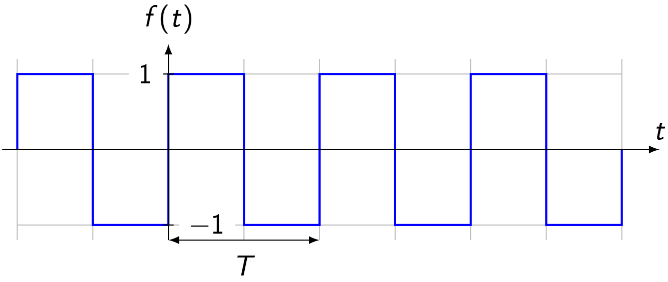
Fourier-sor

- Periodikus jelekre működik.
- $f(t+T) = f(t)$
- Trigonometrikus alak:

$$\begin{aligned} x(t) = a_0 + {} & a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots \\ & + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots = \\ = a_0 + {} & \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)) \end{aligned}$$

- $$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{1}$$

1. négyszögjel spektruma



$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \in]0, \frac{T}{2}[\\ -1 & \text{ha } t \in]-\frac{T}{2}, 0[\end{cases} \qquad x(t+T) = x(t)$$

1. négyszögjel spektruma, trigonometrikus

Páratlan függvényekben csak …tagok, páros függvényekben csak …tagok vannak.

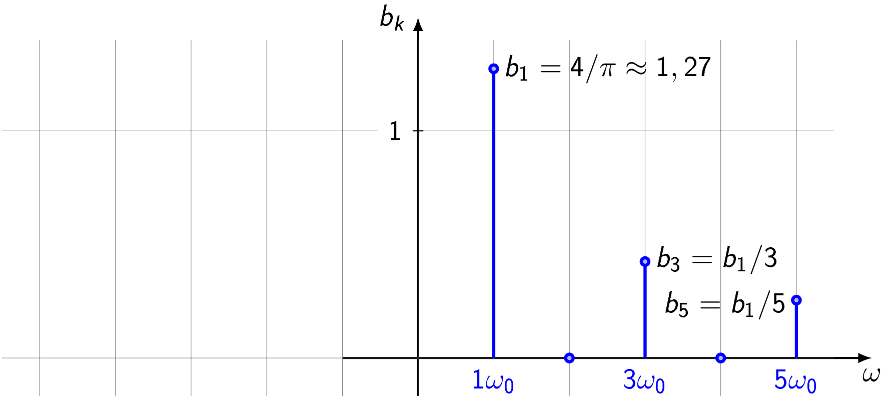
$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} + \frac{\sin(5\omega_0 t)}{5} + \ldots\right)$$

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k}$$

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_3 = \frac{1}{3}\frac{4}{\pi}, \quad b_5 = \frac{1}{5}\frac{4}{\pi}, \quad b_7, b_9 \ldots$$

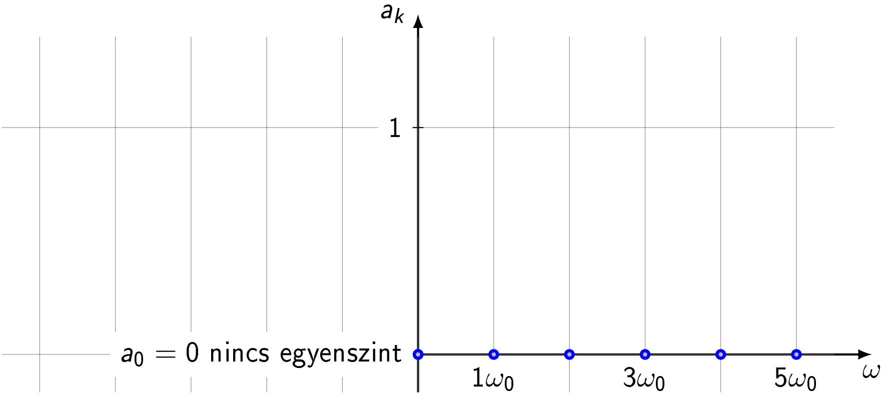
Az a_k-k és a páros indexű b_k-k nullák.

1. négyszögjel spektruma: trigonometrikus, b_k



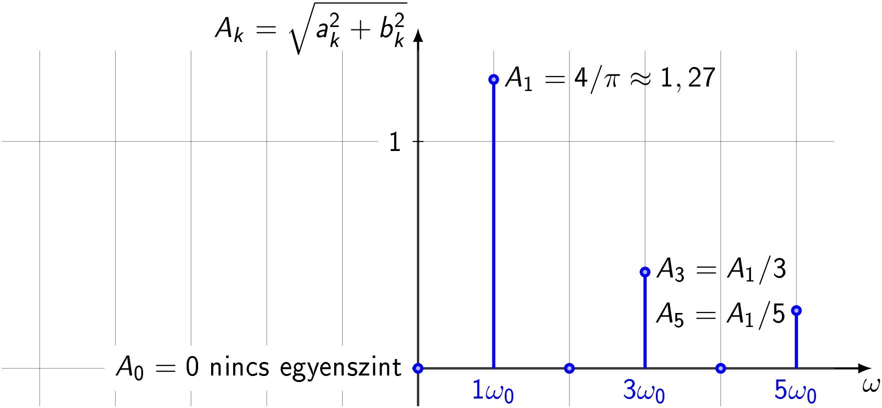
$b_k \neq 0 \Leftrightarrow k$ páratlan.

1. négyszögjel spektruma: trigonometrikus, a_k



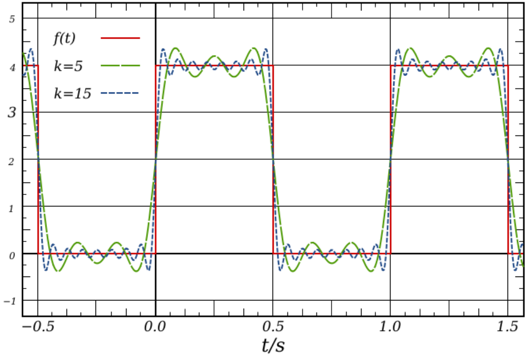
$a_k = 0$ nincsenek koszinuszos tagok.

1. négyszögjel spektruma: trigonometrikus, amplitudó



Itt $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{0^2 + b_k^2} = |b_k| = b_k \quad (k > 0)$.

2. négyszögjel (áttérés másik négyszögjelre)



$$x(t) = \begin{cases} 4\,\mathrm{V} \text{ ha } t \in]0, \frac{1}{2}\,\mathrm{s}[\\ 0\,\mathrm{V} \text{ ha } t \in]-\frac{1}{2}\,\mathrm{s}, 0[\end{cases} \qquad x(t + 1\,\mathrm{s}) = x(t)$$

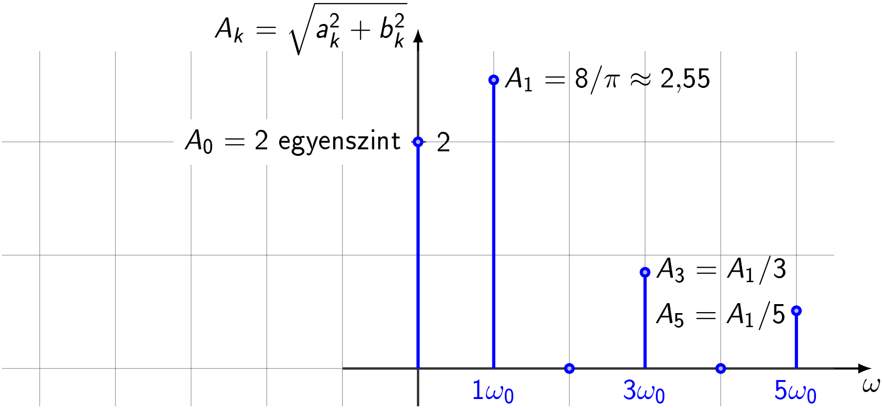
2. négyszögjel spektruma

$$x(t) = 2\,\mathrm{V} + \frac{8}{\pi}\,\mathrm{V}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} + \frac{\sin(5\omega_0 t)}{5} + \dots\right)$$

$$x(t) = 2\,\mathrm{V} + \frac{8}{\pi}\,\mathrm{V} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k} \qquad \omega_0 = 2\pi\frac{rad}{s}$$

$$a_0 = 2\,\mathrm{V}; \quad b_1 = \frac{8}{\pi}\,\mathrm{V}, \quad b_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{\pi}\,\mathrm{V}, \quad b_5 = \frac{1}{5}\cdot\frac{8}{\pi}\,\mathrm{V}$$

2. négyszögjel spektruma: trigonometrikus, amplitudó



Itt $A_k = b_k$, ha $k \geq 1$, $\quad A_0 = a_0$.

Fourier-részösszeg MATLAB-ban és Octave-ban

```
x = linspace(-pi, pi, 1024)
y = zeros(1, 1024)
for k=1:2:15 % 1, 3, ... 15
    y += sin(k*x)/k
end
plot(x, 4/pi*y)
title('Négyszögjel Fourier-sora 15 tag')
savefig('fourier15.png')
```

Fourier-részösszeg Python3-ban

```python
from pylab import *

x = linspace(-pi, pi, 1024)
y = 0
for k in range(1,16,2): # 1, 3, ... 15
    y += sin(k*x)/k
plot(x, 4/pi*y)
title('Négyszögjel Fourier-sora 15 tag')
savefig('fourier15.png')
show()
```

Vázlat

1. Harmónikus jel és a szögfüggvények
   - Szükséges alapismeretek ismétlése
2. Fourier-sor
   - Trigonometrikus alakban
   - Fourier-sor exponenciális alakban
3. Fourier–transzformáció (folytonos és diszkrét)
   - Az AM modulált jel spektruma
   - Diszkrét Fourier–transzformáció (DFT)
4. A jelek csoportosítása

Két fontos összefüggés

A cos és sin exponenciális alakja

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} e^{j\omega t}$$

$$\sin \omega t = \frac{j}{2} e^{-j\omega t} - \frac{j}{2} e^{j\omega t}$$

j a képzetes egység (szokásos mérnöki jelölésmódja)

$$j^2 = -1$$

Az e^z jelölés helyett gyakran az $\exp(z)$ jelölés használatos:

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} \exp(-j\omega t) + \frac{1}{2} \exp(j\omega t)$$

Exponenciális alakban

$$\begin{aligned} x(t) = {} & X_1 \exp(j\omega_0 t) + X_2 \exp(j2\omega_0 t) + X_3 \exp(j3\omega_0 t) + \dots \\ & + X_0 \\ & + X_{-1} \exp(-j\omega_0 t) + X_{-2} \exp(-j2\omega_0 t) + X_{-3} \exp(-j3\omega_0 t) + \dots \end{aligned} \tag{2}$$

$$e^{-j\omega t} = \exp(-j\omega t) = \cos \omega t - j \sin \omega t \tag{3}$$

A rövid alakja:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \exp(jk\omega_0 t) \tag{4}$$

Exponenciális alakban

$$\begin{aligned} x(t) = {} & X_1 \exp(j\omega_0 t) + X_2 \exp(j2\omega_0 t) + X_3 \exp(j3\omega_0 t) + \dots \\ & + X_0 \\ & + X_{-1} \exp(-j\omega_0 t) + X_{-2} \exp(-j2\omega_0 t) + X_{-3} \exp(-j3\omega_0 t) + \dots \end{aligned} \tag{2}$$

$$e^{-j\omega t} = \exp(-j\omega t) = \cos \omega t - j \sin \omega t \tag{3}$$

A rövid alakja:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \exp(jk\omega_0 t) \tag{4}$$

Példák

Vizsgáljuk meg egy szinuszos jel Fourier-sorát.

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) = -\frac{jA}{2}\exp(j\omega_0 t) + \frac{jA}{2}\exp(-j\omega_0 t) \qquad (5)$$

Trigonometrikus alakban $b_1 = A$, a többi együttható nulla.
Exponenciális alakban $X_1 = -\frac{jA}{2}, X_{-1} = \frac{jA}{2}$, a többi együttható nulla
(+K alakot, négyszögjelet is. Ábra táblára)

Példák

Vizsgáljuk meg egy szinuszos jel Fourier-sorát.

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) = -\frac{jA}{2}\exp(j\omega_0 t) + \frac{jA}{2}\exp(-j\omega_0 t) \tag{5}$$

Trigonometrikus alakban $b_1 = A$, a többi együttható nulla.
Exponenciális alakban $X_1 = -\frac{jA}{2}, X_{-1} = \frac{jA}{2}$, a többi együttható nulla

(+K alakot, négyszögjelet is. Ábra táblára)

Példák

Vizsgáljuk meg egy szinuszos jel Fourier-sorát.

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) = -\frac{jA}{2}\exp(j\omega_0 t) + \frac{jA}{2}\exp(-j\omega_0 t) \qquad (5)$$

Trigonometrikus alakban $b_1 = A$, a többi együttható nulla.
Exponenciális alakban $X_1 = -\frac{jA}{2}, X_{-1} = \frac{jA}{2}$, a többi együttható nulla
(+K alakot, négyszögjelet is. Ábra táblára)

Áttérés a trigonometrikus és exponenciális alak között

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{jb}{2}\right) \cdot e^{-j\omega t} + \left(\frac{a}{2} - \frac{jb}{2}\right) \cdot e^{j\omega t}$$

1. feladat

Igazoljuk a fenti összefüggést!

2. feladat

Hogyan számolhatjuk az X_1 és X_{-1} együtthatókat és a_1 és b_1 együtthatókat egymásból?

3. feladat

Milyen kapcsolat lesz A_1 és $|X_1|$ között?

Áttérés a trigonometrikus és exponenciális alak között

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{jb}{2}\right) \cdot e^{-j\omega t} + \left(\frac{a}{2} - \frac{jb}{2}\right) \cdot e^{j\omega t}$$

1. feladat

Igazoljuk a fenti összefüggést!

2. feladat

Hogyan számolhatjuk az X_1 és X_{-1} együtthatókat és a_1 és b_1 együtthatókat egymásból?

3. feladat

Milyen kapcsolat lesz A_1 és $|X_1|$ között?

Áttérés a trigonometrikus és exponenciális alak között

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{jb}{2}\right) \cdot e^{-j\omega t} + \left(\frac{a}{2} - \frac{jb}{2}\right) \cdot e^{j\omega t}$$

1. feladat

Igazoljuk a fenti összefüggést!

2. feladat

Hogyan számolhatjuk az X_1 és X_{-1} együtthatókat és a_1 és b_1 együtthatókat egymásból?

3. feladat

Milyen kapcsolat lesz A_1 és $|X_1|$ között?

Áttérés a trigonometrikus és exponenciális alak között

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \left(\frac{a}{2} + \frac{jb}{2}\right)\cdot e^{-j\omega t} + \left(\frac{a}{2} - \frac{jb}{2}\right)\cdot e^{j\omega t}$$

1. feladat

Igazoljuk a fenti összefüggést!

2. feladat

Hogyan számolhatjuk az X_1 és X_{-1} együtthatókat és a_1 és b_1 együtthatókat egymásból?

3. feladat

Milyen kapcsolat lesz A_1 és $|X_1|$ között?

4. feladat

Mi lesz X_5 ha $X_{-5} = 4 - 3j$?

5. feladat

Mekkora $|X_5|$, a_5, b_5 és A_5, ha $X_5 = 4 - 3j$?

6. feladat

Milyen függvények esetén lesznek X_k értékek valósak?

7. feladat

Mit lehet mondani az X_k, a_k és b_k értékekről, ha a függvény páratlan?

4. feladat

Mi lesz X_5 ha $X_{-5} = 4 - 3j$?

5. feladat

Mekkora $|X_5|$, a_5, b_5 és A_5, ha $X_5 = 4 - 3j$?

6. feladat

Milyen függvények esetén lesznek X_k értékek valósak?

7. feladat

Mit lehet mondani az X_k, a_k és b_k értékekről, ha a függvény páratlan?

4. feladat

Mi lesz X_5 ha $X_{-5} = 4 - 3j$?

5. feladat

Mekkora $|X_5|$, a_5, b_5 és A_5, ha $X_5 = 4 - 3j$?

6. feladat

Milyen függvények esetén lesznek X_k értékek valósak?

7. feladat

Mit lehet mondani az X_k, a_k és b_k értékekről, ha a függvény páratlan?

4. feladat

Mi lesz X_5 ha $X_{-5} = 4 - 3j$?

5. feladat

Mekkora $|X_5|$, a_5, b_5 és A_5, ha $X_5 = 4 - 3j$?

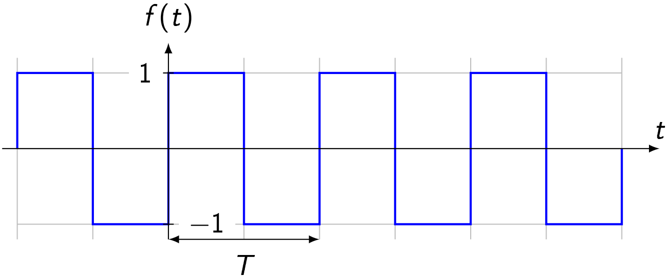
6. feladat

Milyen függvények esetén lesznek X_k értékek valósak?

7. feladat

Mit lehet mondani az X_k, a_k és b_k értékekről, ha a függvény páratlan?

1. négyszögjel spektruma



$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \in]0, \frac{T}{2}[\\ -1 & \text{ha } t \in]-\frac{T}{2}, 0[\end{cases} \qquad x(t+T) = x(t)$$

Határozzuk meg az 1. négyszögjel spektrumát exponenciális alakban és ábrázoljuk a spektrumot exponenciális alakban ($|X_k|$-t).

1. négyszögjel spektruma, exponenciális

Ezt már megállapítottuk korábban

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_3 = \frac{1}{3}\frac{4}{\pi}, \quad b_5 = \frac{1}{5}\frac{4}{\pi}, \quad b_7, b_9 \ldots$$

Az a_k-k és a páros indexű b_k-k nullák.

Mivel nincs egyenszint $X_0 = 0$

A páros indexű X_k-k nullák lesznek.

$$X_{-1} = \frac{a_1}{2} + j\frac{b_1}{2} = j\frac{2}{\pi}, \quad X_{-3} = j\frac{1}{3}\frac{2}{\pi}, \quad X_{-5} = j\frac{1}{5}\frac{2}{\pi}, \ldots$$

$$X_1 = \frac{a_1}{2} - j\frac{b_1}{2} = -j\frac{2}{\pi}, \quad X_3 = -j\frac{1}{3}\frac{2}{\pi}, \quad X_5 = -j\frac{1}{5}\frac{2}{\pi}, \ldots$$

1. négyszögjel spektruma, exponenciális

Ezt már megállapítottuk korábban

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_3 = \frac{1}{3}\frac{4}{\pi}, \quad b_5 = \frac{1}{5}\frac{4}{\pi}, \quad b_7, b_9 \ldots$$

Az a_k-k és a páros indexű b_k-k nullák.

Mivel nincs egyenszint $X_0 = 0$

A páros indexű X_k-k nullák lesznek.

$$X_{-1} = \frac{a_1}{2} + j\frac{b_1}{2} = j\frac{2}{\pi}, \quad X_{-3} = j\frac{1}{3}\frac{2}{\pi}, \quad X_{-5} = j\frac{1}{5}\frac{2}{\pi}, \ldots$$

$$X_1 = \frac{a_1}{2} - j\frac{b_1}{2} = -j\frac{2}{\pi}, \quad X_3 = -j\frac{1}{3}\frac{2}{\pi}, \quad X_5 = -j\frac{1}{5}\frac{2}{\pi}, \ldots$$

1. négyszögjel spektruma, exponenciális

Ezt már megállapítottuk korábban

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_3 = \frac{1}{3}\frac{4}{\pi}, \quad b_5 = \frac{1}{5}\frac{4}{\pi}, \quad b_7, b_9 \ldots$$

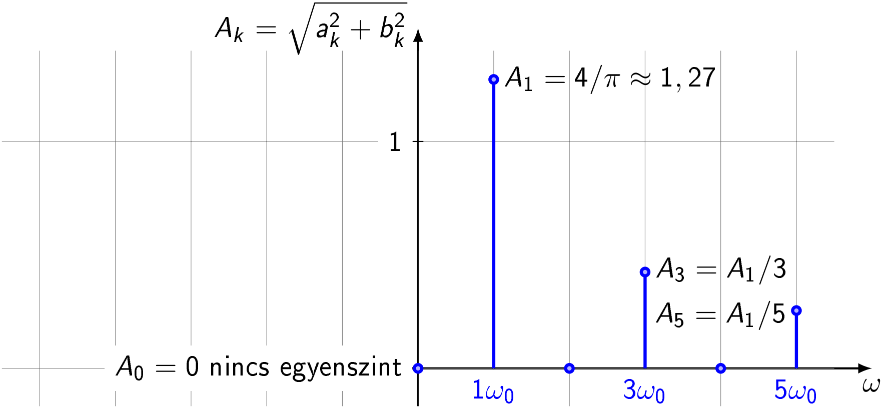
Az a_k-k és a páros indexű b_k-k nullák.

Mivel nincs egyenszint $X_0 = 0$
A páros indexű X_k-k nullák lesznek.

$$X_{-1} = \frac{a_1}{2} + j\frac{b_1}{2} = j\frac{2}{\pi}, \quad X_{-3} = j\frac{1}{3}\frac{2}{\pi}, \quad X_{-5} = j\frac{1}{5}\frac{2}{\pi}, \ldots$$

$$X_1 = \frac{a_1}{2} - j\frac{b_1}{2} = -j\frac{2}{\pi}, \quad X_3 = -j\frac{1}{3}\frac{2}{\pi}, \quad X_5 = -j\frac{1}{5}\frac{2}{\pi}, \ldots$$

1. négyszögjel spektruma: trigonometrikus, amplitudó

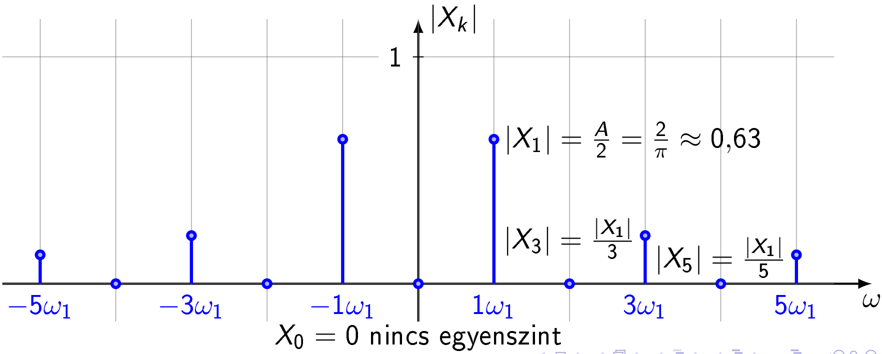


Itt $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{0^2 + b_k^2} = |b_k| = b_k \quad (k > 0)$.

1. négyszögjel spektruma: exponenciális, $|X_k|$

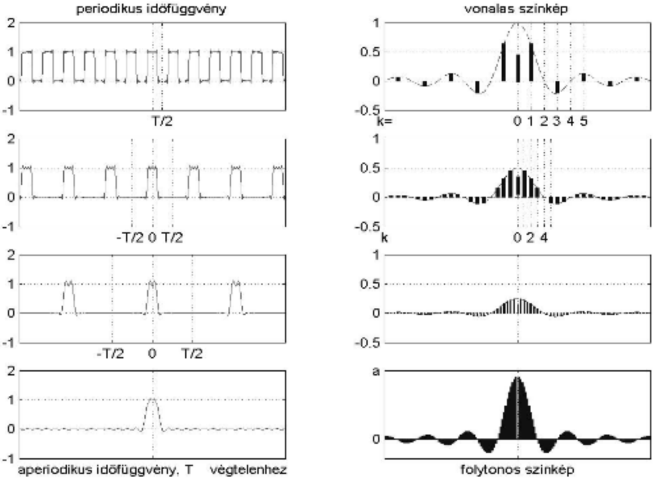
$$|X_0| = A_0$$

$$|X_{-k}| = |X_k| = \frac{A_k}{2}, \quad k > 0$$



Vázlat

Folytonos spektrum kialakulása



Fourier–transzformáció

Nem periodikus (aperiódikus) jelek esetén. $(T \to \infty)$

Fourier–sor	Fourier–transzformáció
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \exp(jk\omega t)$	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t)\,\mathrm{d}\omega$
$X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-jk\omega t)\,\mathrm{d}t$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t)\,\mathrm{d}t$

Fourier–transzformáció

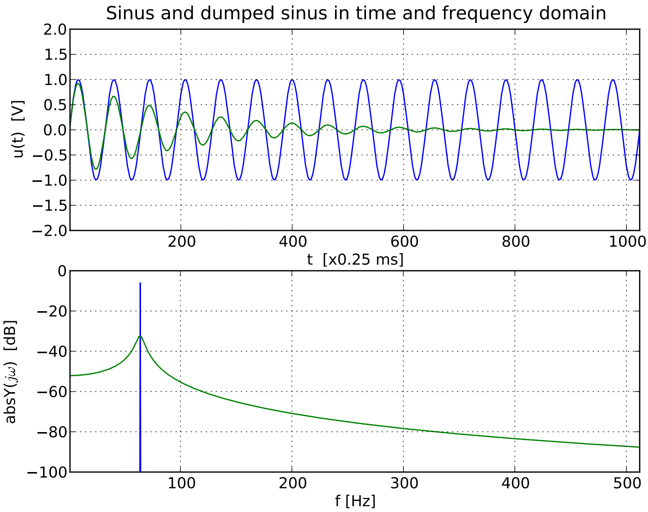
Nem periodikus (aperiódikus) jelek esetén. $(T \to \infty)$

Fourier–sor	Fourier–transzformáció
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \exp(jk\omega t)$	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t)\,\mathrm{d}\omega$
$X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-jk\omega t)\,\mathrm{d}t$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t)\,\mathrm{d}t$

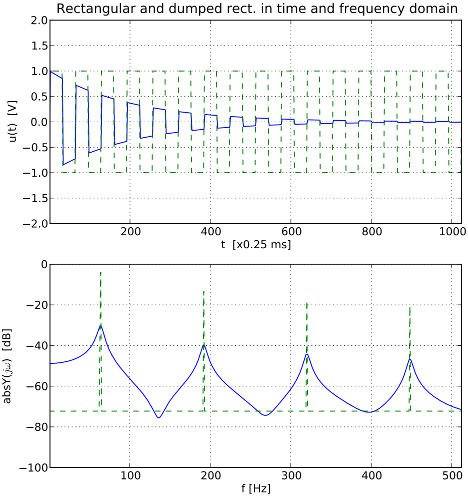
Szinusz spektruma

Milyen lesz a szinusz, illetve a csillapított szinusz spektruma?

Szinusz és csillapított szinusz színképe



Négyszögjel és csillapított négyszögjel színképe



Vázlat

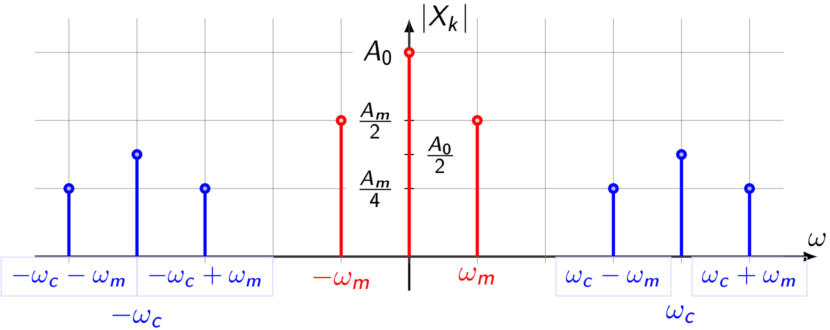
Az AM-modulált jel spektruma

A modulálandó $a(t)$ jel Fourier-transzformáltját jelölje $A(\omega)$.
Táblán, és a nyomtatott változatban

Alapsávi és modulált jel spektruma, harmónikus jel

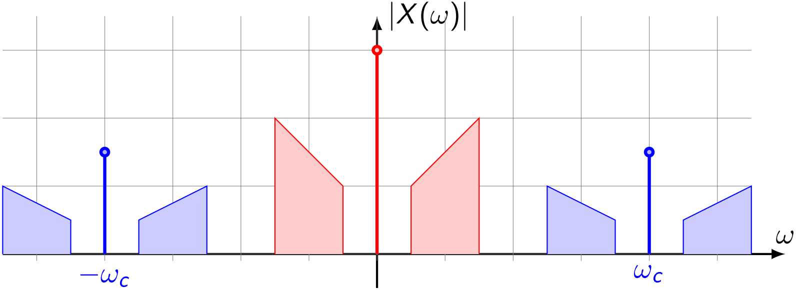
Az alábbi ábra mutatja az alapsávi és modulált jel spektrumát az alábbi képletű s_m harmónikus moduláló jel és s_c vivőjel esetén.

$$s_m(t) = A_m \cos(\omega_m t) + A_0, \quad s_c(t) = 1 \cos(\omega_c t)$$



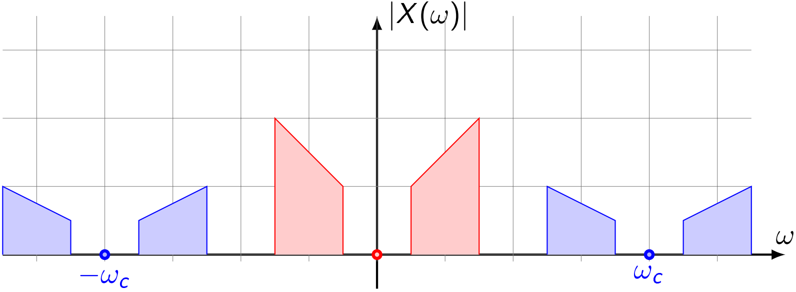
Alapsávi és modulált jel spektruma, AM-DSB

Az alábbi ábra mutatja az alapsávi és modulált jel spektrumát folytonos spektrumú moduláló jel esetén.



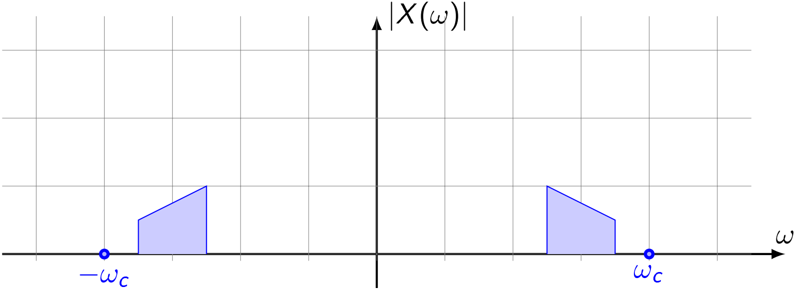
Alapsávi és modulált jel spektruma, elnyomott vivős, AM-DSB/SC

Az alábbi ábra mutatja az alapsávi és modulált jel spektrumát folytonos spektrumú moduláló jel esetén.



Modulált jel spektruma, egy oldalsávos, AM-SSB

Az alábbi ábra mutatja a modulált jel spektrumát folytonos spektrumú moduláló jel esetén.



Vázlat

Diszkrét Fourier–transzformáció (DFT)

Mintavételezett jelek esetén a Fourier–transzformáció DFT-be megy át.

Diszkrét Fourier–tr.	Fourier–transzformáció
$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{n,k}$	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t)\, \mathrm{d}\omega$
$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-n,k}$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t)\, \mathrm{d}t$

Twiddle-faktor

$$W_N^{n,k} = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$f = kf_0, \quad t = nT$$

Diszkrét Fourier–transzformáció (DFT)

Mintavételezett jelek esetén a Fourier–transzformáció DFT-be megy át.

Diszkrét Fourier–tr.	Fourier–transzformáció
$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{n,k}$	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t)\,\mathrm{d}\omega$
$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-n,k}$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t)\,\mathrm{d}t$

Twiddle-faktor

$$W_N^{n,k} = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$f = kf_0, \quad t = nT$$

Diszkrét Fourier–transzformáció (DFT)

Mintavételezett jelek esetén a Fourier–transzformáció DFT-be megy át.

Diszkrét Fourier–tr.	Fourier–transzformáció
$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{n,k}$	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t)\,\mathrm{d}\omega$
$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-n,k}$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t)\,\mathrm{d}t$

Twiddle-faktor

$$W_N^{n,k} = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$f = kf_0, \quad t = nT$$

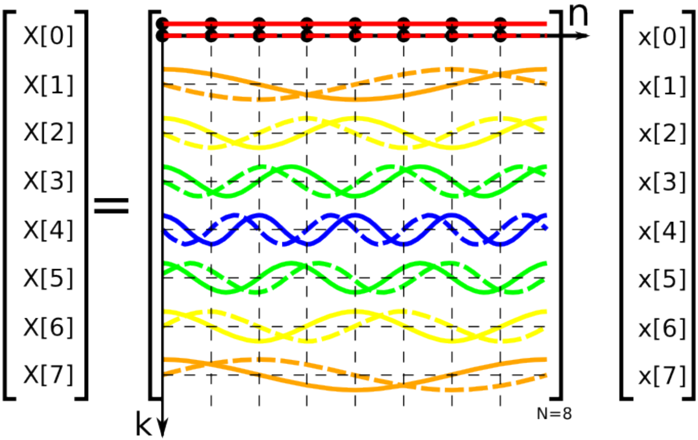
DFT: mátrix alak (N=16)

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-n,k}$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} W_{16}^{0,0} & \cdots & W_{16}^{-n,0} & \cdots & W_{16}^{-15,0} \\ W_{16}^{0,1} & \cdots & W_{16}^{-n,1} & \cdots & W_{16}^{-15,1} \\ W_{16}^{0,2} & \cdots & W_{16}^{-n,2} & \cdots & W_{16}^{-15,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_{16}^{0,k} & \cdots & W_{16}^{-n,k} & \cdots & W_{16}^{-15,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_{16}^{0,15} & \cdots & W_{16}^{-n,15} & \cdots & W_{16}^{-15,15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(n) \\ \vdots \\ x(15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(k) \\ \vdots \\ X(15) \end{bmatrix}$$

DFT: szemléletesen (N=8)

folytonos valós rész, szaggatott képzetes



DFT: műveletszám

A műveletek különféle átrendezésével kisebb műveletigénnyel is megvalósítható, és ezáltal gyorsabbá tehető a transzformáció. Ezeket a gyorsabb változatokat nevezzük gyors Fourier–transzformációnak (FFT, Fast F. T.).
MAC-műveletszám (komplex szorzás+összegzés)

	DFT	FFT	
N	$(N-1)^2$	$N/2 \cdot \log_2 N$	hányados
16	225	32	7
128	16129	448	36
256	65025	1024	64
1024	1046529	5120	204

Vázlat

1. Harmónikus jel és a szögfüggvények
   - Szükséges alapismeretek ismétlése
2. Fourier-sor
   - Trigonometrikus alakban
   - Fourier-sor exponenciális alakban
3. Fourier–transzformáció (folytonos és diszkrét)
   - Az AM modulált jel spektruma
   - Diszkrét Fourier–transzformáció (DFT)
4. A jelek csoportosítása

A jelek csoportosítása

Analóg/digitális jel
Periodikus jel
Kváziperiodikus jel
Sávhatárolt jel
Véges idejű jel
Harmónikus jel