Hibajavítás és hibajelzés

Informatikai rendszerek alapjai

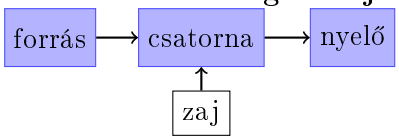
Horváth Árpád <horvath.arpad@amk.uni-obuda.hu>

2016. november 24.

Tartalomjegyzék

1. Hibákról

Információátvitel diagrammja



Példák:

Beszélgetés forrás: száj, csatorna: levegő, nyelő: fül

Földfelszíni rádióadás forrás: a rádióadó vagy az átjátszó antennája, csatorna: az „éter”, nyelő: a rádió antennája

Internet forrás: router1, csatorna: üvegszál, nyelő: router2

Hibák előfordulása

- Üvegszálakon ritkán
- Sodrott érpáron (pl. UTP kábel) gyakrabban
- Vezeték nélküli hálózatokban gyakran
- Egyes közegekben (pl. rádió) általában csoportosan
  - Előny: kevesebb adatcsomagot érint
  - Hátrány: nehezebb jelezni ill. javítani a hibát

2. Hibajavító és -jelző kódok

Hibajavítás és -jelzés

Két lehetőség:

- Annyi redundanciát adunk minden elküldött adatblokkhoz, hogy visszaállítható legyen az eredeti.
- hibajavító kód – error-correcting code
- Annyi redundanciát adunk minden elküldött adatblokkhoz, hogy kiderüljön, hogy hibás adatot kaptunk-e.
- Ha hibás, újraküldjük.
- hibajelző kód – error-detecting code
- Az első akkor ha nem küldhető újra az adat (CD, DVD), illetve adatszórásnál (digitális rádió, TV).

Alapfogalmak

Kódszavak (codeword): m üzenetbitből (message bit) és r redundáns ellenőrző bitből állnak.

A teljes hossz $n = m + r$.

Definíció

Az olyan helyek számát, ahol két kódszóban különböző bitek állnak, a két kódszó *Hamming-távolság*ának nevezzük. (Hamming, 1950)

Alapfogalmak

Példa

a kódszó	*1*	1	*0*	1	*1*	*0*	1	0	1
b kódszó	*0*	1	*1*	1	*0*	*1*	1	0	1

d(ab) = $\boxed{4}$ a Hamming-távolsága a két kódszónak.

Ha két kódszó Hamming-távolsága 4, akkor $\boxed{4}$ hiba kell ahhoz, hogy az egyik a másikba menjen.

Általában mind a 2^m üzenetbit-sorozat érvényes, de nem mind a 2^n bitsorozat kódszó.

Ismerve az redundáns bitek kiszámításának módját, meghatározható a legális kódszavak listája (üzenetenként egy). Ezek közül kikereshető az a kódszópár, amelynek Hamming-távolsága minimális.

Kód és kódszó

Definíció

Az érvényes n bites bitsorozatokat kódszavaknak nevezzük.

A kódszavak összességét kódnak nevezzük.

Alapfogalmak

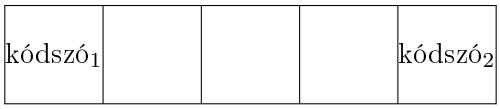
Definíció
Egy *kód Hamming-távolság*án a minimális távolságot értjük, amelyet két kódszava között találunk.

Példa
Az alábbi kód Hamming-távolsága $\boxed{4}$.

```
a 01010101
b 00001111
c 00110010
```

d(ab) = $\boxed{4}$
d(bc) = $\boxed{5}$
d(ac) = $\boxed{5}$

Egy kód Hamming-távolsága 4.

- Legfeljebb $\boxed{3}$ hiba lehet, hogy biztosan ne kapjunk másik kódszót az eredeti helyett.
- Legfeljebb $\boxed{1}$ hiba lehet, hogy biztosan ki tudjuk találni, melyik volt az eredeti kódszó.
- 

Feladat
Maximum e hibára számítunk.
Mennyi legyen a kód d Hamming-távolsága, hogy ki tudjuk mutatni a hibát?
$d \geq e + 1$
Mennyi legyen a kód d Hamming-távolsága, hogy javítani tudjuk a hibát?
$d \geq 2e + 1$

Gondolkozzunk! Biztosan sikerül megoldani.
Hogyan lehetne olyan kódot előállítani, hogy egy hibát ki tudjunk mutatni?

Azaz jönnek *adott hosszúságú üzenetek (bitsorozatok)*, és mindegyik helyett egy másik bitsorozatot küldünk, úgy, hogy meg tudjuk mondani, hogy *hibásan ment-e át* az üzenet, és ha nem, *meg tudjuk határozni az üzenetet.*

Több bit kell? Elég ugyanannyi? Vagy kevesebb is?

Na és ezt sikerül?
Hogyan lehetne olyan kódot előállítani, hogy egy hibát ki tudjunk javítani?

Egyelőre nem érdekel, hogy milyen hosszúak a kódszavak.

Paritásbit

Definíció
Ha a kódszóhoz egy olyan bitet fűzünk, hogy a kódszóban levő 1-esek száma páros (illetve páratlan) legyen. Ezt a bitet nevezzük páros (páratlan) *paritásbit*nek.

Továbbiakban páros paritásbitet használunk.
Pl. $11011 \Rightarrow 11011\mathit{0}$
Pl. $10000 \Rightarrow 10000\mathit{1}$
A paritásbit hozzáfűzésével kapott kód Hamming-távolsága: $\boxed{2}$
Alkalmas-e hibajavításra, jelzésre? $\boxed{\text{1 bithiba jelzésére alkalmas (SED–single error detection)}}$

Onnan tudjuk, hogy a paritásbittel kiegészített üzenet, mint kód Hamming-távolsága legalább kettő, mert ha két kódszó csak egy bitben térne el, akkor az egyikben páros, másikban páratlan 1-es lenne. Nem lehet, mindegyik kódszó.

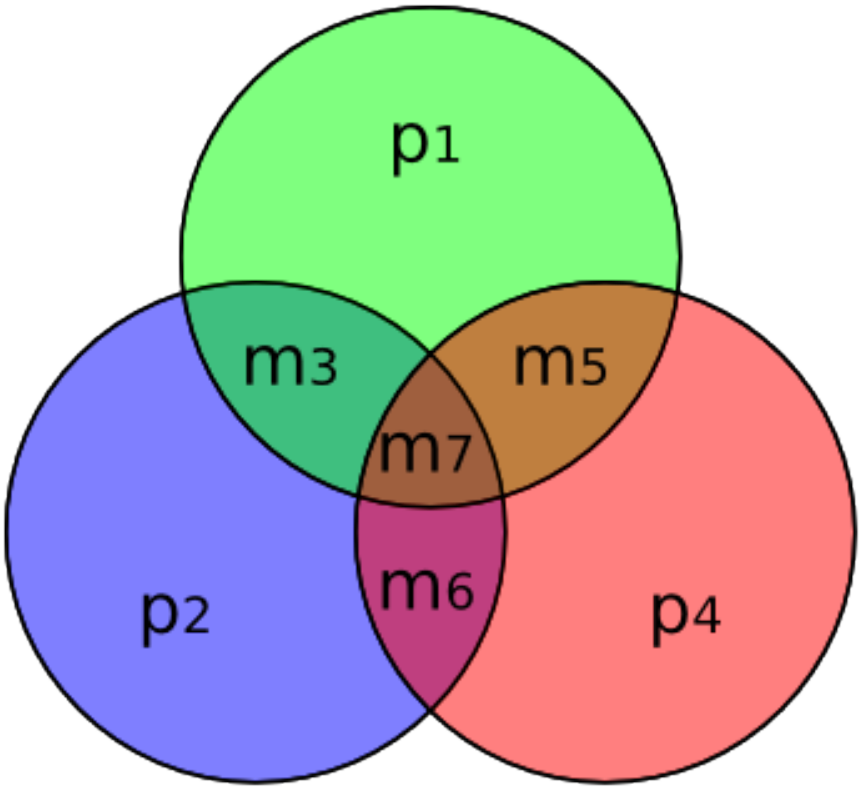
És a távolság nem több, mint kettő, mert ha két bitet megváltoztatunk, akkor újra kódszót kapunk, ugyanúgy páros lesz az 1-esek száma.

Egy bithiba javítása (SEC–single error correction)

Hány bites üzenetünk lehet, ha r többlet bitet adunk az üzenethez?
kódhossz (n) = üzenethossz (m) + redundáns bitek száma (r)

- Egy kódszó és 1 bithibás szomszédai együtt $n+1$ bitsorozatot adnak.
- A 2^m üzenethez legalább $2^m(n+1)$ különböző bitsorozat kell.
- Ha n bites kódszavakat küldünk, akkor a $2^n \geq 2^m(n+1)$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, hogy egy bithiba javítása lehetséges legyen.
- Mivel $n = r + m$, $\boxed{2^r \geq m + r + 1}$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.
- Az egyenlőtlenséget teljesítő minimális egész r bittel tényleg létrehozható egy bithibát javító kódolás: a Hamming-kód.

A Hamming(7, 4)-kód



A Hamming-kód

- A biteket 1-től sorszámozzuk balról jobbra.
- Minden kettő-hatvány (2^i) helyen paritásbit van.
- Az egyes paritásbitek nem az összes bitet „ellenőrzik”.
- A paritásbit ellenőrzi a teljes kulcsszó i. bitjét, ha az i kettes számrendszerbeli alakjában szerepel a 2^i helyiérték.
- Például a 6. bitet ellenőrzi a 4-es és 2-es paritásbit, a többi nem. $6{=}4{+}2{=}110_2$

bit	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	P_1	P_2	$2+1$	P_4	$4+1$	$4+2$	$4+2+1$
	1	10	11	100	101	110	111
P_1	+		+		+		+
P_2		+	+			+	+
P_4				+	+	+	+

Példa

Az 100111 üzenet kódolása, és visszaállítása a kód 7. bitjének meghibásodása esetén.

bit	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
	P_1	P_2	11	P_4	101	110	111	P_8	1001	1010
P_1	?		1		0		1		1	
P_2		?	1			0	1			1
P_4				?	0	0	1			
P_8								?	1	1
	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1

A keresett Hamming-kódszó 1111001011, a P_i jelű oszlopok a paritásbiteket, a többi az üzenet (message) bitjek helye.

Példa folytatása

A keresett Hamming-kódszó 1111001011, a kódot a csatornán átküldve a 7. bitjének meghibásodása esetén a nyelőnél kapott kód 1111000011.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	Helyes?
	P_1	P_2	11	P_4	101	110	111	P_8	1001	1010	(egyesek száma)
P_1	1		1		0		0		1		hibás (3)
P_2		1	1			0	0			1	hibás (3)
P_4				1	0	0	0				hibás (1)
P_8								0	1	1	helyes (2)
	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	Hibás 1+2+4= 7. bit

Írjuk fel, milyen bitek tartoznak az egyes paritásbitek fennhatósága alá és vizsgáljuk meg páros 1-es van-e bennük:

- P_1: 1, 1, 0, 0, 1, hibás
- P_2: 1, 1, 0, 0, 1, hibás
- P_4: 1, 0, 0, 0, hibás
- P_8: 0, 1, 1, jó

A biteket ellenőrizve a P_1, P_2, P_4 paritásbitek hibásak, tehát a sérülés helye az $1+2+4=7$. bitnél volt.

Ezután a helyes kódszó visszaállítható a 7. bit megváltoztatásával:

$$\bar{1}\bar{1}1\bar{1}00\bar{1}\bar{0}11$$

A felülvont karaktereket eltávolítva visszakapjuk az eredeti kódszót:

$$100111.$$

(Miért biztos, hogy két hiba esetén a javítás után hibás kódszót kapunk?)

Több bithiba javítása

Bonyolultabb algoritmussal olyan kód is előállítható, amely több bithibát is képes javítani.

A DVD-n található filmeket, és a digitális televíziós előadásokat (pl. DVB) MPEG kódolással kódolják, amelynek részét képezi a hibajavító kódolás. Az úgynevezett Reed–Solomon kódolást használják.

Az videó-műsorszórás európai szabványában (DVB) egy 188 bájtos adatcsomaghoz 16 bájtnyi redundáns információt fűznek, amely csomagonként 8 bithiba javítására alkalmas.

Csoportos hibák elleni védekezés

- Soronként felírjuk az átküldendő Hamming-kódolt kódszavakat (k darabot).
- Oszloponként küldjük át a jeleket.
- A nyelőnél visszaállítjuk a sorokat, és úgy ellenőrzünk.
- Ha egy k hosszúságú csoportos hiba lép fel, akkor az minden sorban egy bitet ront el, amit a Hamming-kód javítani képes.
- km méretű adatblokkokhoz kr ellenőrző bit.

Csoportos hibák elleni védekezés

jel	7 bites ASCII-kód	Hamming-kódszó
O	1001111	00110010010111
E	1000101	11100001011011
-	0101101	01001011011011
A	1000001	11100000101011
R	1010010	10110101001110
E	1000101	11100001011011
K	1001011	00110011100111

Függőlegesen küldjük el 0101110011101 0 . . . 1111011.

A fenti táblázat kimondottan alkalmas otthoni gyakorláshoz. A második oszlop bitsorozatait kódolva a harmadik oszlopot kell hogy kapjuk. Ha a harmadik oszlop bármelyik bitjét elrontjuk, azt ki kell tudnunk javítani, és a második oszlop bitsorozatát kapjuk.

Egy bithiba javítása (SEC–single error correction)

m hosszúságú üzenetnél hány darab (r) többletbit, hány % redundancia kell?

n	m	r	redundancia (%)
7	4	3	75
15	11	4	36
31	26	5	19
63	57	6	10
127	120	7	6
255	247	8	3
511	502	9	2

Miért nem lehet a gyakorlatban akármennyire növelni m-et?

Mert növekszik a valószínűsége, hogy két hiba forduljon elő, amit nem tudunk javítani.

Kiegészítés a Hamming-kódhoz, csak BSc

A generátormátrix és a paritásellenőrző mátrix

Minden művelet úgy értelmezendő, hogy utána kettes maradékot veszünk, tehát 0 és 1 lesz mindenhol az eredményben.

A generátormátrix következőképp állítható elő az üzenethez tartozó kódszó:

Ha $\mathbf{x}$ az üzenet bitjeit tartalmazó sorvektor, akkor
$\mathbf{y} = \mathbf{xG}$ a kapott Hammig-kódszó.

A $\mathbf{H}$ paritásellenőrző mátrixsszal tudom ellenőrizni, hogy helyes kódszót kaptam-e.
Ha $\mathbf{y}$ helyes kódszó, akkor $\mathbf{Hy}^T$ elemei nullák. Ha nem nullák, akkor annyiadik bit romlott el, ahányadik oszlopa megjelenik a H-nak a szorzatban.

A generátormátrix és a paritásellenőrző mátrix kapcsolata

Az általánosan használt esetben a paritásbiteket a kód végére szokták rakni. Ebben az esetben

a generátormátrix mindig:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{E_m}]$$

alakú, a paritásellenőrző mátrix, pedig

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{E_r} \mid \mathbf{A}^T\right]$$

alakú, egymásból előállíthatóak. $\mathbf{E_k}$ a $k \times k$-s egységmátrix.

Hamming-kód esetén: r: paritásbitek (redundáns bitek) száma; m: üzenetbitek száma

A generátormátrix és a paritásellenőrző mátrix a MATLAB-ban

A két mátrixot a következőképpen lehet megkapni:

```
[H, G] = hammgen(3);
```

ahol $r = 3$ az ellenőrzőbitek száma.

Egy példa kódolásra:

```
>> x = [1 0 0 1];
>> y = mod(x*G, 2)
y =
   0     1     1     1     0     0     1
```

A `mod(A, 2)` függvény a kettes maradékát adja az eredménynek (mátrixnál minden elemnek).

Kódszó elenőrzése

```
>> y1 = [0 1 0 1 0 0 1];
>> mod(H*y1', 2)
ans =
     0
     0
     1
>> H
H =
     1     0     0     1     0     1     1
     0     1     0     1     1     1     0
     0     0     1     0     1     1     1
```

Mivel az eredménnyel a 3. oszlop egyezik, ezért a 3. bit sérült. Összehasonlítható az előző oldallal.

Kódszó elenőrzése

```
G =

     1     1     0     1     0     0     0
     0     1     1     0     1     0     0
     1     1     1     0     0     1     0
     1     0     1     0     0     0     1
```

CRC-kód, csak BSc

CRC-kód Hasonlat: Ha egy számot elosztunk $r+1$-gyel, akkor a maradék legfeljebb r lesz.

Ha egy polinomot elosztunk egy $(r+1)$-ed fokszámú polinommal, akkor a maradék r-ed fokszámú lesz.

Például az 10011 bitsorozathoz a $1x^4+0x^3+0x^2+1x^1+1x^0 = x^4+x+1$ polinomot rendeljük.

A CRC kód (cyclic redundancy code) esetén az üzenet bitjeit egy polinom együtthatóinak tekintjük, előre meghatározott polinommal, az úgynevezett generátor-polinommal, végezzük el az osztást, a maradékot az üzenethez fűzzük. A nyelőnél (ismerve a generátor-polinomot) ugyanígy ellenőrizni tudjuk a redundáns részt, és ha az hibás, akkor újraküldjük az üzenetet. A nyelőnél a generátorpolinomot végigvive a kódolt üzeneten, ha nem sérült kód, akkor csupa nulla marad.

Hardveresen hatékonyan elvégezhető. Rézvezetéken, optikai szálakon és merevlemezeken a bithibaarány kicsi ($< 10^{-6}$), ott alkalmazzuk. Előnye, hogy a csoportos hibákat, amikor r egymás utáni bit sérül, hatékonyan kimutatja. Tipikusan ezeknél a csatornáknál ugyanis ilyen hiba fordul elő.

Polinomosztás elvégzése Minden lépésben a következő 1-es alá írom a generátorpolinomot első 1-sét, és ha két egyforma érték van egymás alatt, nullát írok alá, különben 1-et.

Adott r-edfokú generátorpolinom (r+1 bit)

Legyen a generátorpolinom

$$G(x) = x^3+x+1 = 1x^3+0x^2+1x^1+1x^0$$

azaz $r = 3$, az együtthatók 1011.

```
11010011100    <--- eredeti üzenet
11010011100000 <--- r darab 0-val kiegészítem
1011           <--- generátor polinommal osztok
01100011100000 <--- eredmény
 1011          <--- osztás ...
00111011100000
  1011
00010111100000
   1011
00000001100000
       1011
00000000111000
        1011
00000000010100
         1011
00000000000010
Az utolsó r bitet fűzöm az eredeti üzenethez:
11010011100010 bitsorozatot küldöm el.
```

Ellenőrzés a nyelőnél:

```
11010011100010 <--- kódolt üzenet
1011           <--- generátor polinommal osztok
01100011100010 <--- eredmény
 1011          <--- osztás ...
00111011100010
  1011
00010111100010
   1011
00000001100010
       1011
00000000111010
        1011
00000000010110
         1011
00000000000000
Minden bit 0 lett, nem sérült az üzenet.
```

2.1. feladat Határozzák meg, hogy mi a következő üzenethez tartozó Hamming-kód! 0100100

2.2. feladat Határozzuk meg, hogy a következő bitsorozat érvényes Hamming-kód vagy nem! Ha hibás határozzuk meg melyik bit hibásodott meg! Mi az eredeti átküldött bitsorozat? Mi ebből az üzenet?

010010101001010

2.3. feladat Maximum hány bites üzenetet lehet 10 redundáns bittel Hamming-kódolni?

2.4. feladat Maximum hány bites üzenetet lehet 15 bittel Hamming-kódolni?

2.5. feladat Mi a $G(x) = x^3 + x^2$ generátorpolinomhoz tartozó maradék az alábbi bitsorozat esetén? Mi a teljes átküldendő kód?

`0100111100`

2.6. feladat Hány bites hiba javítható biztosan egy 7-es Hamming-távolságú kóddal?

2.7. feladat Mekkora Hamming-távolságú kód kell 3 bites hiba javításához?

2.8. feladat Hány bites hiba jelezhető biztosan egy 7-es Hamming-távolságú kóddal?

2.9. feladat Mekkora Hamming-távolságú kód kell 3 bites hiba jelzéséhez?

2.10. feladat Mekkora az alábbi két bitsorozat Hamming-távolsága?

`01101011000` és `01001010100`

2.11. feladat Mekkora az alábbi kód Hamming-távolsága?

```
01010101010
01101010111
00000010111
```