MATLAB alapjainak áttekintése

Horváth Árpád <horvath.arpad@amk.uni-obuda.hu>

2017. április 2.

1. MATLAB és társai

MATLAB és társai

MATLAB: „fizetős”, nagy tudású, mérnöki és tudományos feladatok megoldására, mátrixközpontú (MATrix LABoratory)

Octave: nyílt forrású változata, a szintaktikája teljesen azonos, kisebb tudású

Pylab: A MATLAB-éhoz hasonló függvények. A Python nyelvre épül, mások az erősségei mint a MATLAB-nak.

Laboron MATLAB 7.0.1 (2004), F 113-as és 114-es termekben gyakorolhatnak ha nincs óra

Mi a MATLAB?

Egy programozási nyelv, egy interaktív környezettel.

A nyelv tartalmazza a megszokott vezérlési szerkezeteket (ciklus, feltételes elágazás. . .), függvényeket és osztályokat hozhatunk létre benne.

Alkalmas önmagában

- adatok elemzésére és megjelenítésére különféle módokon, ehhez igazodó adattípusai vannak,
- képes táblázatkezelőből, adatbázisból, külső eszközökből adatot gyűjteni,
- a kapott eredményeket és ábrákat elmenteni.

A MATLAB toolboxai. . .

különböző feladatokra (csak pár példa):

- párhuzamos számítások
- statisztikai számítások
- jel- és képfeldolgozás
- pénzügyi és biológiai modellezés
- alkalmazásfejlesztés

A MATLAB numerikus értékeket használ

Mi az $x^2 = 2$ egyenlet megoldáshalmaza?

Pontos értékkel:

$$\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

Numerikus értékkel:

$$\{1.4241\cdots, -1.4241\cdots\}$$

A MATLAB (Pylab, Octave) numerikus értéket használ. Az úgynevezett számítógépalgebrai rendszerek pl. (MAPLE, MATEMATHICA) képesek pontos értékekkel számolni. A MATLAB csak külön eszköztárral körülményesen.

Egy teszt a pontosságra

```
x = 1/3
for i = 1:40  % 40-szer lefut (i értéke most lényegtelen)
  x = 4*x - 1
end
```

Mi lesz az x értéke az egyes lépésekben?

Egyre csökken és 27. lépés után $x = 0$

2. Matematikai kitérő a mátrixokra

Mátrixok: számtáblázatok

A matematika számos területén használatosak a mátrixok. Egyenletrendszerek megoldásában és geometriai transzformációk (forgatás egy lövöldözős játékban) nélkülözhetetlenek. [1em]

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 3x4-es mátrix (3 sor 4 oszlop)[1em]

$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ 1x4-es mátrix (1xm-es, tehát sorvektor)[1em]

$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ 2x1-es mátrix (nx1-es, tehát oszlopvektor)[1em]

Néha kerek zárójellel jelölik.

2.1. Mátrixműveletek

Mátrixműveletek

A mátrixokon az alábbi műveleteket értelmezünk:

- A mátrixok összeadását, ebből definiálható a különbség,
- a mátrixok szorzását, ebből definiálható a hatványozás (a hányadost nem szokás definiálni, majd meglátjuk miért).

És még van egy „nem igazi” művelet, a mátrixok *számmal (skalárral) való szorzása.* Akkor szoktunk műveletről beszélni, ha két ugyanolyan matematikai objektummal műveletet végezve ugyanolyan típusú objektumot kapunk (például a fenti műveleteknél két mátrixból mátrixot, a négy alapműveletnél két számból számot, vektorok összeadásánál két vektorból harmadikat). Itt viszont egy számból és egy mátrixból fogunk mátrixot kapni.

Ezeket a műveleteket majd lineáris algebrából is tanulják.

Mátrixösszeadás értelmezése

A két tag oszlopainak és sorainak számának egyeznie kell, a mátrixok összeadása elemenként történik. Példa két 3×4-es mátrix összegére:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 & 13 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Mátrix skalárral való szorzása

Számunkra a skalár egy számot fog jelenteni. A műszaki életben és a fizikában egy mértékegységgel rendelkező mennyiség (tömeg, töltés, hossz) is lehet.

Egy skalárral való szorzás esetén a mátrix minden elemét megszorozzuk a skalárral. Például:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 8 & 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 4 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Mátrixok kivonása

A mátrixok kivonását ezek után egyszerűen definiálhatjuk. A kivonás tulajdonképpen a mátrix ellentettjének (-1-szeresének) hozzáadását jelenti. A B mátrix ellentettjét a számoknál megszokott módon, $-B$-vel jelöljük.

$$A - B = A + (-1)B = A + (-B)$$

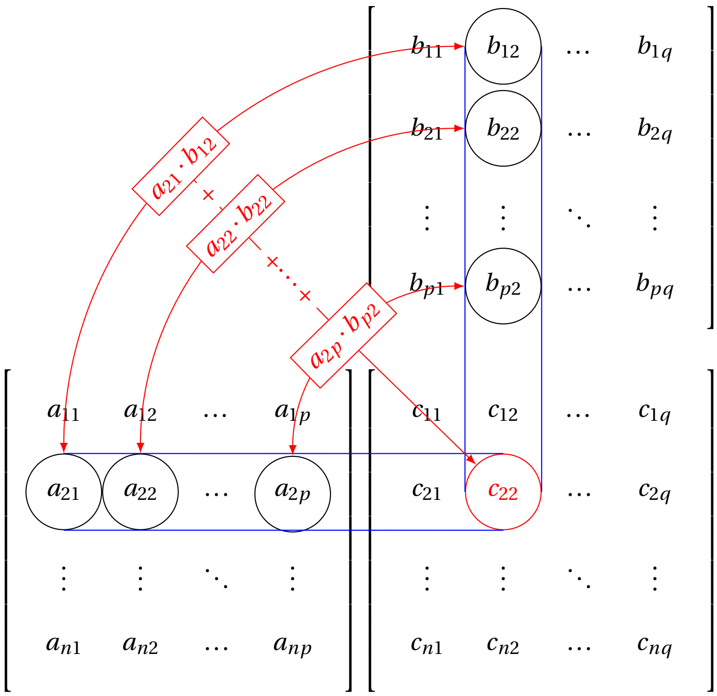
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Mátixszorzás

Két mátrix szorzása során nem elemenként végezzük el a műveletet, mint az összeadás esetén.

Az $A \cdot B = C$ szorzás elvégzését úgy tudjuk könnyen követni, ha a C (még ismeretlen) eredménymátrixtól balra írjuk az első tényezőt (itt A-t), és fölé a második tényezőt (B-t).

A következő dián szereplő ábra mutatja, hogy az eredménymátrixot egy elemét hogyan tudjuk kiszámítani.



Az $A \cdot B = C$ szorzat esetén tehát a szorzatmátrix i-edik sorának j-dik elemét az első tényező i-dik sorából és a második tényező j-dik oszlopából alkotjuk meg:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

A szorzás csak akkor végezhető el, ha az első tényező oszlopainak a száma megegyezik a második tényező sorainak számával. Ezt a számot jelöltük p-vel a képletben és ez előző ábrán.

(A fenti összefüggést a szumma jel alkalmazásával így is lehet írni:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

A szumma jelentése: az utána lévő kifejezést a k minden értékére kiszámolom 1-től p-ig, és az eredményeket összegzem.)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 7 & 15 \\ 16 & 15 & 17 \end{bmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Az eddigi műveletek zöme kétváltozós volt. Két valamiből csinált egy harmadikat. Egy egyváltozós művelet szerepelt már, az ellentettképzés. A transzponált is ilyen egyváltozós művelet: egy mátrixból egy másikat csinál. A transzponálás során az eredeti első sorból lesz az első oszlop, a második sorból a második oszlop és így tovább.

$$A^T = C \Rightarrow a_{ij} = c_{ji}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Mátrixok halmaza

A továbbiakban a valós számokból álló $n \times m$-es (n sor, m oszlop) mátrixok halmazát a következőképp jelölöm:

$$\mathcal{M}_{n\times m}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3} \qquad A^T \in \mathcal{M}_{3\times 4}$$

2.2. Mátrixműveletek tulajdonságai

Mátrixösszeadás tulajdonságai
Csoporttulajdonságok 1.

A mátrixösszeadás a számok összeadásához hasonlóan csoportot alkot, amely a következő négy tulajdonságokat foglalja magában:

a) a mátrixösszeadás *kétváltozós művelet* $\mathcal{M}_{n\times m}$ felett, azaz bármely két $n \times m$-es mátrix összege is ilyen mátrix,

b) asszociatív: az összeadások végrehajtásának sorrendje nem változtat a végeredményen,
Képlettel: Bármely $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times m}$ esetén:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

ezért ha csak összeadás van, nem is kell zárójelezni.

Mátrixösszeadás tulajdonságai
Csoporttulajdonságok 2.

c) Létezik *neutrális elem.*
Létezik egy $\underline{0} \in \mathcal{M}_{n\times m}$ eleme a halmaznak amelyre, akármelyik $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ elem esetén:

$$A + \underline{0} = A \text{ és } \underline{0} + A = A$$

A neutrális elemet összeadásnál *nullelemnek* is szoktuk nevezni. (Szorzásnál pedig egységelemenek.)
A $\mathcal{M}_{2\times 3}$ halmaz nulleleme például:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mátrixösszeadás tulajdonságai
Csoporttulajdonságok 3.

d) *Ellentett* létezése.
Minden $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ mátrixnak létezik ($-A$-val jelölt) ellentettje, amelyre

$$A + (-A) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Mátrixösszeadás tulajdonságai
Kommutativitás

A csoporttulajdonságokon felül még rendelkezik a *kommutativitás* tulajdonságával is:

$$A + B = B + A$$

bármely A és B mátrix esetén, amennyiben összeadhatóak.

A csoporttulajdonságokal és a kommutatív tulajdonsággal rendelkező struktúrákat *kommutatív csoportnak* vagy Abel-csoportnak nevezzük.

Az $(\mathcal{M}_{n\times m}, +)$ algebrai struktúra tehát kommutatív csoport.

A mátrixok, mint vektortér

$(\mathcal{M}_{n\times m}, +, \lambda\cdot)$ *vektortér*.

Az $\mathcal{M}_{n\times m}$ mátrixai úgynevezett *vektorteret* alkotnak az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve. Ez azt jelenti, hogy bizonyíthatóak, hogy a mátrixok két műveletére teljesülnek a következő szabályok:

- $(\mathcal{M}_{n\times m}, +)$ kommutatív csoport,
- a következő disztributív szabályok teljesülnek:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$
$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

- még két feltétel:

$$\lambda(\mu A) = (\lambda \cdot \mu)A$$
$$1A = A$$

2.3. Mátrixok alkalmazásai

Alkalmazások

Órán voltak részletezve.

- lineáris transzformációk: forgatás (2D, 3D), tükrözés,
- gráfokban adott hosszúságú séták száma két csúcs között,
- lineáris egyenletrendszer megoldása (gyakorlaton bővebben)
- és még rengeteg helyen.

3. Mátrixműveletek a MATLAB-ban

A további részek a MATLAB laborgyakorlatokhoz tartoznak, azok ismerete nem szükséges az FSZ-es hallgatók számára. Számonkérésükre a gyakorlaton kerül sor.

Mátrixműveletek a MATLAB-ban

Az mátrixok összeadását, kivonását és szorzását a programnyelvekben számok esetén megszokott módon jelöljük a MATLAB-ban is: `+, -, *`. A skalárral való szorzásra szintén a `*` jelet használjuk.

A mátrixok közötti elemenkénti szorzásra és osztásra és elemenkénti hatványozásra a MATLAB-nak egy külön jelölése van: a megszokott műveleti jel elé tett ponttal jelöljük.

A transzponáltat a mártix után elhelyezett aposztróf jelöli: `A'`

Elemenkénti és mátrixműveletek

A szorzást kétféleképpen is el lehetne végezni mátrixok között:

- azonos méretű mátrixok esetén lehet elemenként szorozni: ha az eredeti mátrixok elemeit a_{ij}-vel és b_{ij}-vel, eredmény elemeit c_{ij}-vel jelöljük, akkor $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$.
- a következő oldalon definiált mátrix-szorzás esetén a helyzet bonyolultabb.

A MATLAB műveletei

`+ - * /    ^ (hatványozás)`
Ponttal elemenkénti műveletek, anélkül mátrixműveletek.
A különbség a szorzásnál és a hatványozásnál fontos.
Ha A és B mátrixok, mit jelenthet:

- `A*B`
- `A.*B`
- `A^2`
- `A.^2`

Mátrixok megadása MATLAB-ban

Elemek felsorolásával (pontosvessző helyett soremelés is lehet):
`A = [2 3 1; 5 3 0]`

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sorvektort kettőspontos jelöléssel.

Speciális függvényekkel. Pl. rand, eye, linspace.

A kettőspontos jelölés

n:m   n-től m-ig egyesével a számok
2:5   [2 3 4 5]

n:s:m   n-től m-ig s lépésközzel
2:3:20   [2 5 8 11 14 17 20]
1:0.1:1.5   [1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5]

Sorvektor megadása a linspace függvénnyel

Ugyanúgy egyenletesen (lineárisan) oszlanak el a pontok, de a lépésköz helyett a darabszámot tudjuk.

`linspace(kezd, vég [, darabszám])`

A darabszám elhagyható.

Pl. `linspace(0, 7*pi+1, 1024)`

Kirajzoltatás

A plot parancs (egyszerűsítve) így néz ki:

```
plot([x,] y[, formátum])
```

x és y sorvektorok, a `formátum` egy sztring

A szögletes zárójel az elhagyható paramétereket (x és `formátum`) jelöli.

```
x = [5     2     0]
y = [1     3    -1]
%   (5,1), (2,3), (0,-1) pontok ábrázolása
plot(x, y, 'o') % körökkel
plot(x, y, '-')
% vagy
plot(x, y) % összeköti vonallal
```

Ábra készítése MATLAB-ban

```
x = linspace(0, 2*pi, 1000) % 1000 érték 0-tól 2*pi-ig
plot(x, sin(x))
hold on             % Így nem törlődik az előző ábra
plot(x, cos(x), '.')
title('szögfüggvények')
xlabel('x (radian)')
ylabel('y')
grid on           % Rács az ábrára
legend('szinusz', 'koszinusz')
```

Feladat

Ábrázolja az

$$x \rightarrow 2sin(x)cos(x)$$

függvényt a $[-2,2]$ intervallumon!

Megoldási lehetőségek

Az x sorvektor létrehozása többféle lehet. Például:

```
x = linspace(-2, 2, 1000)
x = linspace(-2, 2)
x = -2:0.1:2
```

A kirajzoltatás:

```
plot(x, 2*sin(x).*cos(x))
```

Miért kell `.*` ?

Vonaltípusok és markerek (nem teljes)

formátum	magyarázat
-	folytonos vonal (alapértelemezett)
--	szaggatott
:	pontozott
-.	pontvonal
.	
+	
x	
o	
h és H	hatszög
d és D	gyémánt ◇
p	ötszög (pentagon)
v > < ^	háromszögek

Színek

jelölés	magyarázat
r	piros
g	zöld
b	kék
c	ciánkék
y	sárga
m	bíbor (magenta)
k	fekete (blacK)
w	fehér

’ro’ sárga körök, ’x’ x-ekkel, ’y’ sárga folytonos, ’:’ pontozott

ha nincs szín megadva, akkor

- MATLAB-ban: kék
- Pylab-ban: a „következő” szín a színpalettából

Matematikai függvények (nem teljes)

függvény	magyarázat
sqrt	négyzetgyök
sin	szinusz (szögfüggvényekben radián, sind fok)
cos	koszinusz
tan	tangens
asin	arcus sinus
atan2	kétváltozós arcus tangens (szemközti és melletti koordináta előjelhelyesen)
exp	exponenciális függvény (az alap e=2.717....)
log	természetes logaritmus (alapja e)
log2	kettes alapú logaritmus
log10	tizes alapú logaritmus
round	kerekít egészre (lásd még ceil, floor)
sign	előjel függvény (1, ha pozitív, -1, ha negatív, 0 ha 0 az érték)

A továbbiakról

A továbbiakban rendszerezni szándékozom a mátrixok műveleteinek tulajdonságait. Ez a rész nem kötelező, csak érdeklődőknek készül, és hiányos. Lehet, hogy lassan készül és átmenetileg kicsit pongyola is lehet.

Csoport (group) definíciója

Az $(G, \circ)$ párost csoportnak nevezzük, ha:

- A $\circ$ egy kétváltozós művelet az G halmaz felett, azaz bármely $a, b \in G$ esetén $a \circ b \in G$
- A $\circ$ művelet asszociatív:
$$\forall a, b, c \in G \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$
- Létezik n neutrális elem:
$$\exists! n \in G \quad \forall a \in G \quad a \circ n = a \text{ és } n \circ a = a$$
- Minden elemnek létezik inverze:
$$\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G \quad a \circ a^{-1} = n \text{ és } a^{-1} \circ a = n$$

Kommutatív csoport

Egy csoportot kommutatív csoportnak (más néven Abel-csoportnak) nevezünk, ha a művelet kommutatív, azaz:
$$\forall a, b \in G \quad a \circ b = b \circ a$$

Test (field) definíciója

Az $(F, +, \cdot)$ hármast testnek nevezzük, ha:

- $(F, +)$ kommutatív csoport,
  a neutrális elemét 0 jelöli (nullelem),
  az additív inverzet $-a$ jelöli (ellentett),

- $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutatív csoport,

  neutrális elemét 1 jelöli (egységelem),

  a multiplikatív inverzet a^{-1}

- teljesül a disztributivitás
$$\forall a, b, c \in F \quad a(b+c) = ab + ac$$

Példák testekre: racionális számok, valós számok, komplex számok a szokásos összeadással és szorzással.

Egész számoknál a multiplikatív inverz hiányzik (reciprok).

Mátrixokról az absztrakt algebra nyelvén

Továbbiakban nem szorítkozunk a valós számokra, a mártix elemei tetszőleges F test elemei lehetnek, és ugyanilyen elemekkel való szorzást jelenti a skalárral való szorzás.

- $(\mathcal{M}_{n\times m}, \lambda\cdot, +)$

  (azaz az $n \times m$-es mátrixok a skalárral való szorzás és az összeadás műveletekre nézve)

  vektortér,

- $(\mathcal{R}_n, \cdot)$

  azaz a reguláris (nem nulla determinánsú) $n \times n$-es mátrixok a mátrixszorzásra nézve

  csoport, de *nem kommutatív* csoport.

  A neutrális eleme (egységeleme) az egységmátrixnak nevezett mátrix, ahol a főátlóban 1-esek, máshol 0-ák állnak. (Az 1 és a 0 a test egységeleme és nulleleme.)